目　录

第 1 章 网与滤子

这一章主要讨论网收敛. 我们将证明空间的拓扑完全可以通过收敛来描述. 详细的说, 每个收敛类决定了一个拓扑, 在收敛类中规定的收敛等价于依照拓扑收敛.

1.1 网收敛

1.1.1 网、收敛

定义 1.1

称偏序集 $(D, \leq)$ 为定向集, 若任意 $\alpha \in D, \beta \in D$, 存在 $\gamma \in D$ 满足 $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$.

♣

- 称定向集 $(D, \leq)$ 的子集 E 是共尾的, 若任意 $\alpha \in D$, 存在 $\beta \in E$ 满足 $\alpha \leq \beta$. 显然此时 $(E, \leq)$ 也是定向集.[1]
- 称定向集 $(D, \leq)$ 的子集 E 是等终的, 若存在 $\alpha_0 \in D$ 满足任意 $\alpha \geq \alpha_0$ 有 $\alpha \in E$. 显然等终一定是共尾的.

例 1.1 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间, $x \in X$, 记 x 的邻域系为 $\mathcal{U}_x$, 则 $(\mathcal{U}_x, \supset)$ 是一定向集.

定义 1.2

设 X 为集合, $(D, \leq)$ 为定向集. 称映射 $\xi : D \to X$ 为 X 中的网, 也常记为 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$, 其中 $\xi_\alpha = \xi(\alpha), \forall \alpha \in D$.

♣

- 称网 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 在集 A 内, 若 $\xi_\alpha \in A, \forall \alpha \in D$.
- 称网 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 终在集 A 内, 若存在 $\alpha_0 \in D$, 满足 $\xi_\alpha \in A, \forall \alpha \geq \alpha_0$. 换言之, $\{\alpha \in D \mid \xi_\alpha \in A\}$ 是 D 的等终子集.
- 称网 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 常在集 A 内, 若任意 $\alpha \in D$, 存在 $\beta \geq \alpha$ 且 $\xi_{beta} \in A$. 换言之, $\{\alpha \in D \mid \xi_\alpha \in A\}$ 是 D 的共尾子集.

定义 1.3

$(X, \mathcal{T})$ 是一拓扑空间, $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 为 X 中的网, 称网 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 收敛 (关于 $\mathcal{T}$), 若存在 $x \in X$, 使得 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 终在 x 的任一邻域中, 其极限点全体记为 $\lim(\xi)$ 或 $\lim\limits_{\alpha \in D}(\xi_\alpha)$.

♣

例 1.2 X 为离散空间, 则网 $(\xi_\alpha)_{\alpha \in D}$ 收敛于点 x 当且仅当存在 α_0, 使得 $\xi_\alpha = x, \forall \alpha \geq \alpha_0$. 另一方面, 若 X 为平庸空间, 则 X 中任一网收敛于 X 中任意点.

下面的定理说明网收敛确实刻画了空间的拓扑.

[1] E 上的偏序为 D 中偏序在 E 上的限制.

定理 1.1

设 X 为拓扑空间, $A \subset X$, 则:

1. $x \in d(A)$ 当且仅当有 $A - \{x\}$ 中的网收敛于 x.
2. $x \in \overline{A}$ 当且仅当有 A 中的网收敛于 x.

注意 定理 1.1 中并没有要求网的定义域如何, 只是对网的值域做了要求.

数学分析中, 我们知道数列极限的唯一性有着重要的作用, 自然不禁要问何时网的极限也具有唯一性呢?

定理 1.2

拓扑空间中的收敛的网极限唯一当且仅当该空间是 Hausdorff 空间.

由定理1.2 的证明方法, 我们可以引入一般化的乘积定向集: 若给定了一族定向集 $\{(D_\lambda, \preceq_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, 可以定义笛卡尔积 $\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_\lambda$ 上的偏序 $\preceq$: 任意 $f, g \in \Pi_{\lambda\in\Lambda}D_\lambda$, $f \preceq g$ 当且仅当 $f_\lambda \preceq_\lambda g_\lambda$ 对任意的 $\lambda \in \Lambda$ 皆成立. 容易验证, $\Pi_{\lambda\in\Lambda}D_\lambda$ 装备这样的" 分量偏序" 后确实是定向集.

例 1.3 令 $(D_\lambda, \preceq_\lambda) = (\mathbb{R}, \leqslant)$, $\forall\lambda \in \Lambda$, $f, g \in \Pi_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{R}$, 即 f, g 是 Λ 上的实函数, 则 $f \leqslant g$ 当且仅当 $f(\lambda) \leqslant g(\lambda)$, $\forall\lambda \in \Lambda$. Λ 上实函数全体关于上述偏序成为定向集.

本节的最后我们介绍一个定理, 它表明我们可以用单重极限来代替累次极限. 为了讨论累次极限, 自然要有拓扑空间 X 和其中的一些点 $\xi(\alpha,\beta)$, 我们要先对 β 求极限, 再对 α 求极限. 于是要求任一给定的 α, β 在一个定向集 E_α 中取, 这样 $(\xi(\alpha,\beta))_{\beta\in E_\alpha}$ 就是 X 中的网. 假设求极限可以得到 (注意极限不一定唯一) t_α. 我们还要对 α 求极限, 于是要求 α 在某定向集 D 中取, 这样 $(t_\alpha)_{\alpha\in D}$ 就是 X 中的网, 我们就可以对它求极限了.

定理 1.3. 累次极限定理

$D, \{E_\alpha \mid \alpha \in D\}$ 是定向集. X 是一拓扑空间. 映射

$$\xi : \bigcup_{\alpha\in D}\{\alpha\} \times E_\alpha \to X$$

$$\eta : D \times \prod_{\alpha\in D} E_\alpha \to \bigcup_{\alpha\in D}\{\alpha\} \times E_\alpha\,;\ (\alpha, f) \mapsto (\alpha, f(\alpha))$$

若任意给定 $\alpha \in D$, 有 $t_\alpha \in X$ 使得 $(\xi(\alpha,\beta))_{\beta\in E_\alpha}$ 收敛于 t_α, 且 $(t_\alpha)_{\alpha\in D}$ 收敛于 x, 则网 $\xi \circ \eta$ 必收敛于 x.

注意 (i). 极限唯一性得以保证时, 上述过程可以表示为 $\lim\limits_{\alpha\in D}\lim\limits_{\beta\in E_\alpha}\xi(\alpha,\beta) = \lim(\xi\circ\eta)$.
(ii). 一点的开邻域系是邻域基是证明上述定理的关键.
(iii). 本定理表明可以通过单重极限来代替累次极限.
(iv). 由本定理可以得到 $A^{--} = A^{-}$.

1.1.2 子网, 聚点

类似于数列的子列和聚点, 我们引入网的子网和网的聚点.

定义 1.4

称网 $(\eta_\beta)_{\beta\in E}$ 是网 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 的子网, 当且仅当存在映射 $\phi: E\to D$ 满足

1. $t=\xi\circ\phi$, 即任意 $\beta\in E$, $\eta_\beta=\xi_{\phi(\beta)}$.
2. 任意 $\alpha\in D$, 存在 $\beta\in E$, 当 $\gamma\geq\beta$ 时恒有 $\phi(\gamma)\geq\alpha$.

♣

注意 (i). 条件 2 直观的说明了 β 变大时 $\phi(\beta)$ 也变大. 显然此条件保证了若 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 终(常) 在集 A 内, 子网 $(\eta_\beta)_{\beta\in E}$ 终 (常) 在集 A 内.
(ii). 上述定义也可以这样说:

定义 1.5

$(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 为一网, $(\phi_\beta)_{\beta\in E}$ 是 D 中的网且满足任意 $\alpha\in D$, 存在 $\beta\in E$, 当 $\gamma\geq\beta$ 时恒有 $\phi_\gamma\geq\alpha$. 则称网 $(s_{\phi_\beta})_{\beta\in E}$ 为 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 的子网.

♣

例 1.4 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 是一网, E 是 D 的共尾子集, 则 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in E}$ 是其子网.

例 1.5 $\phi: E\to D$ 是保序的 $\big(\alpha\geq\beta$ 时 $\phi(\alpha)\geq\phi(\beta)\big)$, $\phi(E)$ 是 D 的共尾子集, 则 $(\xi_{\phi(\beta)})_{\beta\in E}$ 是 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 的子网.

这里要注意一个问题, 序列作为网, 其子网不一定还是子序列:

例 1.6 $(x_n)_{n=0}^\infty$ 是 $\mathbb{R}$ 中的序列. 考虑定向集 $\mathbb{R}^+$, 装备自然的小于偏序. 则 $(x_{[t]})_{t\in\mathbb{R}^+}$ 是其子网, 但不是子序列.

定义 1.6

$(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, $\xi=(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 是 X 中的网. 称 $x\in X$ 是其聚点 (adherent point), 当且仅当 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 常在 x 的每个邻域中. 聚点全体记为 $\mathrm{ad}(\xi)$.

♣

注意 注意区别拓扑空间中网的聚点和集合的聚点.

例 1.7 一个网有唯一的聚点, 但此网不一定收敛. 考虑 $\mathbb{R}$ 中序列 $\{1,2,1,3,1,4,\cdots\}$ 即可.

数学分析中我们知道, 一点是数列的聚点当且仅当有子列收敛于这一点. 对网的聚点也有类似的命题:

定理 1.4

拓扑空间中某点是一个网的聚点, 当且仅当有子网收敛于该点.

♡

注意 由本定理的证明可以发现, 子网中定义域 (定向集) 中的序结构发生了变化, 起到了本质的作用. 此外还应强调一点, 某点为一个序列的聚点, 并不能得出该数列有收敛子列收敛与该点, 只能得出该序列的子网收敛与该点. 但是若加上拓扑空间是第一可数的条件, 则可以推出某点为一个序列的聚点, 该数列有收敛子列收敛与该点.

下面说清如何用闭包刻画网的聚点:

定理 1.5

X 是一拓扑空间, $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 是 X 中的网. 任给 $\alpha\in D$, 令 $A_\alpha=\{\xi_\beta\mid\beta\geq\alpha\}$. 则网的聚点全体可表示为:

$$\mathrm{ad}(\xi)=\bigcap_{\alpha\in D}\overline{A_\alpha}\ .$$

注意 联系下文中网与滤子关系, 滤子的聚点可更好理解本定理.

1.1.3 收敛类

X 是一集合, C 是一些形如 (ξ,x) 的元素组成的集, 其中 ξ 为 X 中的网, x 为 X 中的点. 则何时有 X 的一个拓扑 $\mathcal{T}$, 满足 $(\xi,s)\in C$ 当且仅当 ξ 关于拓扑 $\mathcal{T}$ 收敛于 x？为了叙述方便我们将 $(\xi,x)\in C$ 称为 ξ C-收敛于 x.

定义 1.7

称 C 是 X 中的收敛类, 当且仅当

1. ξ 为 X 中常值网, 即 $\xi=x$ 对任意 $\alpha\in D$ 成立, 其中 D 是 ξ 的定义域. 则 ξ C -收敛于 x.
2. ξ C -收敛于 x, 则 ξ 的任意子网 C -收敛于 x.
3. ξ 不 C -收敛于 x, 则存在其子网 $\xi\circ\phi$, $\xi\circ\phi$ 的任意子网不 C -收敛于 x.
4. (累次极限) D, $\{E_\alpha\mid\alpha\in D\}$ 是定向集.

$$\xi:\bigcup_{\alpha\in D}\{\alpha\}\times E_\alpha\to X$$

$$\eta:D\times\prod_{\alpha\in D}E_\alpha\to\bigcup_{\alpha\in D}\{\alpha\}\times E_\alpha\,;\ (\alpha,f)\mapsto(\alpha,f(\alpha))$$

若任意给定 $\alpha\in D$, 有 $t_\alpha\in X$ 使得 $(\xi(\alpha,\beta))_{\beta\in E_\alpha}$ C -收敛于 t_α, 且 $(t_\alpha)_{\alpha\in D}$ C -收敛于 x, 则网 $\xi\circ\eta$ 必 C -收敛于 x.

定理 1.6

C 是 X 中的收敛类, 对 X 的任意子集 A, 令 $\overline{A}=\{x\in X\mid$ 存在A 中的网C -收敛于$x\}$. 则 $A\mapsto\overline{A}$ 是一闭包算子, 决定了 X 上一拓扑 $\mathcal{T}$, 且 ξ C -收敛于 x 当且仅当它关于拓扑 $\mathcal{T}$ 收敛于 x.

何时拓扑可以用序列来描述?

定理 1.7

$(X,\mathcal{T})$ 是第一可数的拓扑空间, 则

1. $x\in d(A)$ 当且仅当有 $A-\{x\}$ 中的序列收敛于 x; $x\in\overline{A}$ 当且仅当有 A 中的序列收敛于 x.
2. A 为开集当且仅当任意收敛于 A 中点的序列终在 A 内.
3. x 为序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ 的聚点当且仅当有 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ 的子序列收敛于 x.

1.2 滤子

1.2.1 滤子, 极大滤子

定义 1.8

集 X 的一个非空子集族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X) - \{\varnothing\}$ 为其滤子 (filter), 当且仅当

1. $\mathcal{F}$ 对包含关系是完全性: $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B$, 则 $B \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ 对有限交运算封闭: $A, B \in \mathcal{F}$, 则 $A \cap B \in \mathcal{F}$.

♣

由 1 知, 每个滤子都至少含有元素 X, 即 $X \in \mathcal{F}$. 为了方便, 将 X 的滤子全体记为 $\mathscr{F}(X)$. 下面给出一个滤子的例子:

例 1.8 拓扑空间 X 的邻域系 $\mathcal{U}_x$ 是 X 的滤子.

一个自然的问题是, 滤子在交运算下是否仍然得到滤子?

命题 1.1

$\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\} \subset \mathscr{F}(X)$, 则 $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ 是 X 的滤子.

♠

我们当然要问如何构造一个滤子? 或者说给出集 X 的一个非空子集族 $\mathcal{A}$, 何时有 X 的滤子包含 $\mathcal{A}$? 显然若有滤子包含 $\mathcal{A}$, 那么 $\mathcal{A}$ 应该具有有限交性质. 反过来是否也成立呢, 答案是肯定的:

若 $\mathcal{A}$ 是 X 的非空子集族, 且具有有限交性质. 则 $\mathcal{A}_{\cap f}$ 是 X 具对有限交运算封闭的非空子集族, 再将其 "完全化:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \left\{B \subseteq X \mid \exists n \in \mathbb{N}^{+}, A_i \in \mathcal{A}(1 \geqslant i \leqslant n), \bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset B\right\}$$

是包含 $\mathcal{A}$ 最小的滤子. 成为 $\mathcal{A}$ 生成的滤子.

若 $\mathcal{A}$ 是 X 的非空子集族, 满足: 任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 存在 $C \in \mathcal{A}$, 使得 $C \subset A \cap B$, 则成为 $\mathcal{A}$ 生成的滤子为

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}} = \{B \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{A}, A \subseteq B\}$$

何时一族滤子的并还是滤子? 且看如下命题:

命题 1.2

$\{\mathcal{F}_i \mid i \in I\} \subset \mathscr{F}(X)$, 且在包含关系下是定向集, 则 $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$ 是 X 的滤子.

♠

由命题 1.2 和 Zorn 引理知, $(\mathscr{F}(X), \subseteq)$ 中有极大成员, 称为 X 的极大滤子 (maximal filter) 或超滤 (ultrafilter). 且还是用命题 1.2 和 Zorn 引理可得: X 的任意滤子都可以扩充成一极大滤子.

例 1.9 X 是非空集, $\varnothing \neq A \subset X$, 则 A 生成的滤子 $\mathcal{F}_A = \{B \subset X \mid A \subset B\}$ 是 X 的滤子. 特别的, $x \in X$, $\{\hat{x}\}$ 称为 x 生成的主滤 (pricinple filter), 显然它是极大滤子.

例 1.10 X 是无限集, 则 $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid X - A \text{ 是有限集}\}$ 是 X 的滤子, 且包含 $\mathcal{F}$ 的滤子不是主滤. 故存在不是主滤的极大滤子.

定理 1.8

X 是非空集, $\mathcal{F} \in \mathscr{F}(X)$, 则下面条件等价:

1. $\mathcal{F}$ 是极大滤子.
2. 若 $A \subseteq X$ 满足任意 $C \in \mathcal{F}$, $A \cap C = \varnothing$, 则 $A \in \mathcal{F}$.
3. 若 $A \cup B \in \mathcal{F}$, 则 $A \in \mathcal{F}$ 或 $B \in \mathcal{F}$.
4. 任意 $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ 或者 $A^c \in \mathcal{F}$.

1.2.2 滤子的聚点与极限点

为了引入拓扑空间中滤子聚点的概念, 先引入两个滤子之间的相容关系:

定义 1.9

称集 X 的两个滤子 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 相容, 若任给 $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}, A \cap B \neq \varnothing$.

上述定义即是说 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ 具有有限交性质, 故容易得到滤子相容的等价描述:

定理 1.9

X 的两个滤子 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ 相容, 当且仅当存在滤子 $\mathcal{H}$ 使得 $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}, \mathcal{G} \subset \mathcal{H}$.

注 两个滤子相容实际上是说他们生成的极大滤子相等, 故容易看出滤子间的相容关系是等价关系.

下面借助滤子相容的概念引入拓扑空间中滤子聚点的概念, 一并引入极限点的概念:

定义 1.10

X 是拓扑空间, $\mathcal{F} \in \mathscr{F}(X)$, $x \in X$.

1. 称 x 是 $\mathcal{F}$ 的聚点 (adherent point), 当且仅当 x 的邻域 $\mathcal{U}_x$ 与 $\mathcal{F}$ 相容. $\mathcal{F}$ 的聚点全体记为 $\mathrm{ad}(\mathcal{F})$.
2. 称 x 是 $\mathcal{F}$ 的极限点 (或 $\mathcal{F}$ 收敛于 x), 若 $\mathcal{U}_x \subset \mathcal{F}$. $\mathcal{F}$ 的极限点全体记为 $\lim(\mathcal{F})$.

注 由定义显然知极限点是聚点, 即 $\lim(\mathcal{F}) \subset \mathrm{ad}(\mathcal{F})$. 那么何时能取等号呢? 一个简单的充分条件是: $\mathcal{F}$ 是极大滤子, 则有 $\lim(\mathcal{F}) = \mathrm{ad}(\mathcal{F})$.

我们可以直接给出滤子聚点全体的简洁表述:

定理 1.10

$\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 的滤子, 则 $\mathrm{ad}\mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.

下面的结果是重要的, 也是引入滤子的目的: 通过滤子的收敛, 我们可以描述拓扑.

定理 1.11

X, Y 是拓扑空间.

1. $A \subset X$. 则 $x \in \overline{A}$ 当且仅当存在 $\mathcal{F} \in \mathscr{F}(X)$, 使得 $A \in \mathcal{F}$ (或者说 $\mathcal{F}$ 与 A 生成的滤子 $\mathcal{F}_A$ 相容) 且 $\mathcal{F}$ 收敛于 x.

2. $f : X \to Y$, 点 $x \in X$. 则 f 在 x 处连续当且仅当任何收敛于 x 的滤子 $\mathcal{F}$, 其像 $f(\mathcal{F})$ 生成的滤子收敛于 $f(x)$.
3. X 是 Hausdorff 空间当且仅当 X 中任何收敛的滤子极限点唯一.
4. X 是紧空间当且仅当 X 中任何滤子有聚点, 这当且仅当任何极大滤子收敛. ♡

1.2.3 滤子与网的关系

我们讨论网收敛与滤子收敛之间的关系.

- 设 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 是 X 中的网, 任意 $\alpha \in D$, 令 $A_\alpha = \{\xi_\beta \mid \beta \geqslant \alpha\}$. 显然 $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in D\}$ 是具有有限交性质的集族, 它生成的滤子:
$$\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}_A = \{B \subset X \mid \exists \alpha \in D,\, A_\alpha \subset B\}$$
称为网 ξ 生成的滤子.
- 设 $\mathcal{F}$ 是 X 中的滤子, 令 $D_\mathcal{F} = \{(x, A) \mid x \in A \in \mathcal{F}\}$, 在 $D_\mathcal{F}$ 中规定 $(x, A) \leq (y, B)$ 若 $B \subset A$, 则 $(D_\mathcal{F}, \leq)$ 是定向集. 定义 X 中的网:
$$\xi_\mathcal{F} : D_\mathcal{F} \to X;\ \xi_\mathcal{F}(x, A) = x.$$
称为由 $\mathcal{F}$ 生成的网.

注 可以算出一滤子生成的网生成的滤子是它本身, 但一网生成的滤子生成的网不是它本身.

根据上述定义，我们有下面这个美妙的结论: 滤子和网的收敛的定义是“等价”的.

定理 1.12

X 是拓扑空间, ξ 是 X 中的网, $\mathcal{F}$ 是 X 中的滤子.

1. $\lim(\xi) = \lim(\mathcal{F}_\xi)$; $\operatorname{ad}(\xi) = \operatorname{ad}(F_\xi)$.
2. $\lim(\mathcal{F}) = \lim(\xi_\mathcal{F})$; $ad(\mathcal{F}) = \operatorname{ad}(\xi_\mathcal{F})$. ♡

第 2 章 子空间, 积空间, 商空间

本章中我们介绍通过已知的拓扑空间构造新的拓扑空间的三种惯用的办法. 这三种构造空间的方法都是为了使得某些函数连续而引出的, 因此, 我们开始先定义连续性并且证明关于它的一些简单命题.

连续性

定义 2.1

X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$. 如果 Y 中的每个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集, 则称 f 是从 X 到 Y 的连续映射. ♣

我们给出连续性的等价描述, 这在判断映射的连续性时是很有用的.

定理 2.1

X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$. 则下列命题等价

1. f 连续.
2. Y 中的每个闭集 C 的原像 $f^{-1}(C)$ 是 X 中的闭集.
3. Y 某拓扑子基的每一元的原像是 X 中的开集.
4. 任意 $x \in X$, $f(x) \in Y$ 的每个邻域的原像为 x 的邻域.
5. 任意 $A \subset X$, 有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

♡

我们同样给出一个映射" 在一点连续" 的定义:

定义 2.2

X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$. x 是 X 中一点, 称 f 是在带点 x 处连续, 若 $f(x) \in Y$ 的每个邻域的原像为 x 的邻域. ♣

注意 由定理 2.1 知,X 上的一个映射连续当且仅当它在 X 的每个点都连续.

类比于数学分析中作为数列极限与函数连续性的桥梁的 Heine 定理, 我们有下面的**美妙**的定理:

定理 2.2

X 和 Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$, $x \in X$. 则 f 在 x 点处连续当且仅当任何 X 中收敛与 x 的网 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$, Y 中的网 $(f(\xi_\alpha))_{\alpha\in D}$ 收敛于 $f(x)$. ♡

数学分析中还有一个经常使用且重要的命题: 连续函数的复合是连续的. 这个命题仍然成立:

命题 2.1
X, Y, Z 是拓扑空间, $f: X \to Y$ 连续, $g: Y \to Z$ 连续, 则 $g \circ f: X \to Z$ 连续.

2.1 子空间

讨论子空间目的在于对拓扑空间任一子集, 按某种方式赋予它拓扑, 使之成为一个拓扑空间. 从度量空间中得到启发, 我们有一种自然的方式来定义子空间上的拓扑.

2.1.1 子空间

为了书写简便, 作如下规定: 设 $\mathcal{A}$ 是一个集族, Y 是一个集合. 集族

$$\{A \cap Y | A \in \mathcal{A}\}$$

称为集族 $\mathcal{A}$ 在集合 Y 上的限制, 记为 $\mathcal{A}|_Y$.

定义 2.3
设 Y 是拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 的子集, 则 $\mathcal{T}|_Y$ 是 Y 上的拓扑, 称为 (相对 X 上的拓扑 $\mathcal{T}$ 的) 相对拓扑, 拓扑空间 $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ 称为 $(X, \mathcal{T})$ 的子空间.

注意 记映射 $id: Y \to X;\ y \mapsto y$, 称为恒等嵌入. 则 Y 上的相对拓扑是使恒等嵌入连续的最小的拓扑. 由连续映射的复合还是连续的, 若 f 是 X 上的连续映射, 则 f 在 Y 上的限制 $f|_Y = f \circ id$ 是 Y 上的连续映射.

我们常说拓扑空间 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间, 意思就是指 Y 是 X 的一个子集, 并且 Y 的拓扑就是对于 X 的拓扑而言的相对拓扑. 此外, 我们也常将拓扑空间的子集认为是一个子空间而不另行说明.

此外还应指出一点, 若 $f: X \to Y$ 连续当且仅当 f[1] $: X \to f(X)$, 其中 $f(X)$ 是 y 的子空间.

2.1.2 相对拓扑

由相对拓扑的定义, 容易看出如下结论:

- Y 中的闭集全体为 $\mathcal{F}|_Y$, 其中 $\mathcal{F}$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 中的闭集全体.
- 如果 $\mathcal{B}$ 是拓扑空间 X 的基, 则 $\mathcal{B}|_Y$ 是子空间 Y 的基.
- 如果 $\mathcal{S}$ 是拓扑空间 X 的子基, 则 $\mathcal{S}|_Y$ 是子空间 Y 的子基.
- 如果 $\mathcal{V}_y$ 是点 $y \in Y$ 在拓扑空间 X 中的邻域基, 则 $\mathcal{V}_y|_Y$ 是点 y 在子空间 Y 中的邻域基.

我们以后研究拓扑性质时, 常会遇到如下的问题: A 是 X 的子空间 Y 的子集, A 在 Y 上相对拓扑下的闭包与 A 在 X 中的闭包有什么关系? 下面的定理回答了这个问题.

[1] 严格地说, 应该是 f 诱导出的映射 $\tilde{f}: X \to f(X)\ ;\ x \mapsto f(x)$ 也连续，但我们常将上述 $\tilde{f}$ 仍记为 f.

定理 2.3

设 Y 是拓扑空间 X 子空间, $A \subset Y$, 则

1. A 在 Y 中的导集是 A 在 X 中的导集与 Y 的交, 即 $d_Y(A) = d_X(A) \cap Y$.
2. A 在 Y 中的闭包是 A 在 X 中的闭包与 Y 的交, 即 $\mathrm{cl}_Y(A) = \mathrm{cl}_X(A) \cap Y$.
3. $\mathrm{int}_x(A) = \mathrm{int}_Y(A) \cap \mathrm{int}_X(Y)$

“子空间”事实上是从大拓扑空间中“切割”出来的一部分. 这里有一个反问题: 一个拓扑空间什么时候是另一个拓扑空间的子空间? 我们对他一定程度上的推广更感兴趣: 一个拓扑空间在什么条件下能够“嵌入”到另一个拓扑空间中去?

定义 2.4

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f : X \to Y$, 称 f 是嵌入若其为单射, 且是 X 到其像集 $f(X)$ 的同胚. 若存在一个嵌入 $f : X \to Y$, 我们说拓扑空间 X 可嵌入拓扑空间 Y.

事实上, 拓扑空间 X 可嵌入拓扑空间 Y 意思就是拓扑空间 X 与拓扑空间 Y 的某个子空间同胚. 即在不区别同胚的拓扑空间意义下, X 是 Y 的子空间.

2.2 积空间

现在我们来引入积空间. 即给定了一族拓扑空间 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, 我们赋予 $\Pi_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 适当的拓扑使其成为拓扑空间. 我们总是记 p_γ 是笛卡尔积 $\Pi_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 γ 个投影.

定义 2.5

$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族拓扑空间, 则 $\Pi_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的子集族

$$\mathcal{S} = \{p_\gamma^{-1}(U_\gamma) \mid U_\gamma \text{ 是} X_\gamma \text{ 中的开集}, \gamma \in \Gamma\}$$

是它的某个拓扑 $\mathcal{T}$ 的子基, 拓扑 $\mathcal{T}$ 称为积拓扑. 装备积拓扑的笛卡尔积 $\Pi_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 称为 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的积空间.

注意 积拓扑是使得笛卡尔积上的投影映射连续最小的拓扑.

下面更详细的说一下什么样的集合是积空间中的开集. 记子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑基为 $\mathcal{B}$, 则任何 $B \in \mathcal{B}$ 必然可表示为如下形式:

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{\gamma_k}^{-1}(U_k) = \prod_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$$

其中 $\Gamma_1 = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$ 是 Γ 的有限子集, U_k 是 X_{γ_k} 中的开集. 当 $\gamma \notin \Gamma_1$ 时, $Y_\gamma = X_\gamma$; 当 $\gamma \in \Gamma_1$ 时, Y_γ 是 X_γ 中的开集.

实际上, 我们可以将积空间子基的元素取得更少一点: 若 $\mathcal{S}_\gamma$ 是 X_γ 的子基, 则

$$\mathcal{S}' = \{p_\gamma^{-1}(U_\gamma) \mid U_\gamma \in \mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$$

也是积拓扑的子基.

我们再描述一下积空间中一点 $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 的邻域基: 若 $x_\gamma \in X_\gamma$ 有邻域基 $\mathcal{V}_{x_\gamma}$, 则

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma^{-1}(\mathcal{V}_{x_\gamma}) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \{p_\gamma^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}_{x_\gamma}\}$$

是 $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ 的邻域基.

之前已经指出了积拓扑是使得投影连续的最弱的拓扑, 我们有更细致的说法:

命题 2.2

$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一拓扑空间族, 其积空间为 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. 则有:

1. 任取 $\gamma \in \Gamma$, 投影 p_γ 是连续的开满射.
2. 任取 $\Gamma_1 \subset \Gamma$, π 是 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 到 $\prod_{\gamma\in\Gamma_1} X_\gamma$ 的投影, 则 π 是连续的开满射.

在数学分析课程中, 我们有 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的映射 f 连续, 当且仅当 f 的每个分量函数是连续的. 这个命题在积空间中仍然成立:

定理 2.4

$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一拓扑空间族, Y 也是一拓扑空间,

$$f : Y \to \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$$

是连续映射当且仅当任意 $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma \circ f : Y \to X_\gamma$ 是连续映射.

在数学分析课程中, 我们有 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\left\{(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})\right\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛, 当且仅当其每个分量数列 $\{x_k^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 收敛. 这个命题在拓扑空间中仍然成立;

定理 2.5

$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一拓扑空间族, $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 是 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 中的网. 则 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 收敛于 $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 当且仅当任意 $\gamma \in \Gamma$, $(\xi_\alpha(\gamma))_{\alpha\in D}$ (在 X_γ 中) 收敛于 $x(\gamma)$.

注意 由于此定理的缘故, 积拓扑也常被称为坐标式收敛拓扑或点式收敛拓扑. 鉴于积拓扑完全由其收敛性决定, 对于笛卡尔积 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 上的某个拓扑 $\mathcal{T}$, 只要能判定 $(\xi_\alpha)_{\alpha\in D}$ 中依 $\mathcal{T}$ 的收敛满足分量收敛定理, 即可断定 r 就是积拓扑, 而不必去直接考察 $\mathcal{T}$ 的构成. 今后在涉及积拓扑时, 不可不注意到以上事实.

这一小节的最后, 我们来介绍一个计算积空间中点集闭包和内部有用的公式:

命题 2.3

$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一拓扑空间族, 其积空间为 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. 任何 $\gamma \in \Gamma$, $A_\gamma \subset X_\gamma$, 那么有

$$\overline{\left(\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right)} = \prod_{\gamma\in\Gamma} \overline{A_\gamma}$$

2.3 商空间

定义 2.6

$(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间. Y 是一个集合, $f:X\to Y$ 是一满射. 则 Y 的子集族

$$\mathcal{T}_1=\left\{U\subset Y \mid f^{-1}(U)\in\mathcal{T}\right\}$$

是 Y 的一个拓扑. 称 $\mathcal{T}_1$ 为 Y (相对于满射 f 而言) 的商拓扑. ♣

注意 Y 相对于满射 f 而言的商拓扑是使得 f 连续的最大的拓扑.

根据上述定义, Y 的拓扑 $\widetilde{\mathcal{T}}$ 是 Y 相对于满射 f 而言的商拓扑当且仅当在拓扑空间 $(Y,\widetilde{\mathcal{T}})$ 中 $F\subset Y$ 是闭集等价于 $f^{-1}(F)$ 是 X 中闭集.

定义 2.7

X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$. 我们称映射 f 为商映射, 若它是满射且 Y 装备的拓扑是相对映射 f 而言的商拓扑. ♣

定理 2.6

X,Y 和 Z 都是拓扑空间, 且 $f:X\to Y$ 是一商映射, 则映射 $g:Y\to Z$ 连续当且仅当映射 $g\circ f:X\to Z$ 连续. ♡

如何知道一个拓扑空间的拓扑是相对于从另一个拓扑空间到它的一个满射而言的商拓扑便成了一个有意思的问题. 我们在这里只给出一个简单的充分条件.

定理 2.7

X 和 Y 是两拓扑空间, $f:X\to Y$. Y 的拓扑便是相对于满射 f 而言的商拓扑, 若 f 是连续开满射, 或为连续闭满射. ♡

定义 2.8

$(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间, R 是 X 中一等价关系. 商集 X/R 的 (相对于自然投射 $p:X\to X/R$ 而言的) 商拓扑 $\mathcal{T}$. 称为 X/R 的 (相对于等价关系 R 而言的) 商拓扑, 拓扑空间 $(X/R,\mathscr{T}_R)$ 称为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的 (相对于等价关系 R 而言的) 商空间. ♣

$(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间, R 是 X 中一等价关系. 若无另外的说明, 商集 X/R 我们总认为商集 X/R 的拓扑是商拓扑, 投射 $p:X\to X/R$ 是一个商映射.

定理 2.8

设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$ 是一商映射. 令 $R=\left\{(x,y)\in X^2 | f(x)=f(y)\right\}$, 则拓扑空间 Y 与商空间 X/R 同胚. ♡

拓扑学的中心任务便是研究拓扑不变性质. 本章所讨论的便是拓扑空间的连通性, 包括隔离集、连通性、局部连通性、道路连通性和局部道路连通性.

为了统一与叙述简便, 我们对拓扑性质做如下分类:

- **拓扑不变性质**: 某拓扑空间具有一性质, 则任何一个与其同胚的拓扑空间也具有该性质.
- **可遗传性质**: 某拓扑空间具有一性质, 则其任何子空间也具有该性质.
- **开 (闭) 遗传性质**: 某拓扑空间具有一性质, 则其任何开 (闭) 子空间也具有该性质.
- **可乘性质**: 一族拓扑空间具有某一性质, 则其积空间也具有该性质.
- **有限 (可数) 可乘性质**: 有限 (可数) 个拓扑空间具有某一性质, 则其积空间也具有该性质.
- **可商性质**: 某拓扑空间具有某一性质, 则其任意商空间也具有该性质. 换言之, 该性质在商映射下保持不变.
- **连续 (开、闭) 映射下不变性质**: 某拓扑空间具有某一性质, 则其任意连续 (开、闭) 映射下的像空间也具有该性质.

显然连续映射下不变性质必是拓扑不变性质和可商性质, 而可商性质必是连续开 (闭) 映射下不变性质.

第 3 章 连通性

3.1 隔离集、连通集

3.1.1 隔离集

我们先严格的定义某拓扑空间中两个集合的“隔离”：

定义 3.1

设 A 和 B 是拓扑空间 X 两个子集. 若 $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=\varnothing$, 则称子集 A 和 B 是隔离的.

注意 隔离集的定义中虽有 X 中的闭包算子, 但注意到

$$\mathrm{cl}_X(A)\cap B=\mathrm{cl}_{A\cup B}(A)\cap B.$$

故知 A 与 B 的隔离关系本质上与空间 $A\cup B$ 外的空间无关. 换言之, 我们不需要区分 A,B 到底是在哪个空间中有隔离关系, 因为无论哪个空间中的隔离关系都是等价的.

我们还有如下定理:

定理 3.1

A 和 B 是拓扑空间 X 两个子集. A 与 B 隔离当且仅当二者不交, 且 A 在子空间 $A\cup B$ 中既开又闭.

例 3.1 拓扑空间 X 中两个不交的开 (闭) 集是隔离的.

3.1.2 连通集

定义 3.2

设 X 是一拓扑空间, 若 X 中不存在两个非空隔离子集 A 和 B 使得 $X=A\cup B$, 则称 X 是连通. 称 X 的某个非空子集是联通的当且仅当它作为 X 的子空间是连通的.

例 3.2 包含着多于一个点的离散空间是不连通空间, 而平庸空间都是连通空间.

例 3.3 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的子空间不是连通的. 实际上, $\mathbb{R}$ 中子集连通当且仅当它是区间.

定理 3.2

X 是一拓扑空间. 则 X 是连通空间当且仅当 X 中既开又闭的集合只有 X 和 $\varnothing$.

下面定理直观上容易理解:

定理 3.3

X 是一拓扑空间, Y 是其连通子集. 若 X 中有隔离集 A 和 B, 使得 $Y \subset A \cup B$, 则 $Y \subset A$ 或 $Y \subset B$.

推论 3.1

A 是 X 连通子集, 则 $\overline{A}$ 也是连通子集.

但是应注意 A 是 X 连通子集, A° 不一定是连通的.

例 3.4 $\mathbb{R}^2$ 中两个相切的闭圆盘之并是连通的, 但其内部并不联通.

何时将一些连通的子集求并仍得到连通集? 我们先介绍一个简单的情况.

命题 3.1

X 是一拓扑空间, A 与 B 是 X 两连通子集. 则 $A \cup B$ 连通当且仅当 A 与 B 不是隔离的.

3.1.3 连通分支

为了更深入的分析集合关于连通性的结构, 引入了点之间的连通关系的概念:

定义 3.3

设 X 是一拓扑空间, $x, y \in X$. 若 X 中有一连通子集包含 x 和 y, 就称点 x 和 y 在 X 中连通.

容易验证, 拓扑空间 X 中点的连通关系是一个等价关系.

定义 3.4

设 X 是一个拓扑空间. 对 X 中的点的连通关系而言的每个等价类称为拓扑空间 X 的连通分支. 若 A 是 X 的非空子集, A 作为 X 子空间的每个连通分支称为子集 A 的一个连通分支.

显然, 拓扑空间 X 的子集 A 中的两点 x 和 y 属于 A 的同一连通分支当且仅当存在 A 的连通子集包含点 x 和 y.

定理 3.4

设 X 是一拓扑空间, C 是拓扑空间 X 一连通分支, 则

1. 如果 Y 是 X 连通子集, 并且 $Y \cap C \neq \varnothing$, 则 $Y \subset C$.
2. C 是一个连通子集.
3. C 是一个闭集.

注意 由 1, 2 即知: 拓扑空间中某点所在的连通分支是该空间中包含该点的最大连通子集, 也即所有包含该点的连通子集的并.

推论 3.2

设 A 是拓扑空间 X 中的一个子集. 若任意 $x, y \in A$, x 与 y 在 A 连通 (即存在 Y 的连通子集 B, 使 $x, y \in B$), 则 A 是连通的.

由上述推论, 我们很容易得出比命题 3.1 更好一些的对连通集的并何时还是连通集的回答: 设 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 中一族连通集.

1. 若 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 中任意两元不是隔离的, 则 $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ 是连通的.
2. 若任意 $\alpha, \beta \in \Gamma$, 存在 Γ 中有限个元素 $\gamma_0, \cdots, \gamma_n$, 其中 $\gamma_0 = \alpha, \gamma_n = \beta$, 使得对 $i = 1, 2, \cdots, n$, $Y_{\gamma_{i-1}}$ 与 Y_{γ_i} 不是隔离的, 则 $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ 是连通的.

我们知道连通分支一定是闭集, 下面的例子说明其可以不是开集.

例 3.5 有理数 $\mathbb{Q}$ (作为实数空间 $\mathbb{R}$ 的子空间), 的连通分支都是单点集. 然而 $\mathbb{Q}$ 中的每个单点集都不是开集.

同时也有如下的简单结论:

命题 3.2

- 一拓扑空间的任一既开又闭的非空连通子集必是其某一连通分支.
- 若拓扑空间只有有限个连通分支, 则其每个连通分支必是既开又闭的.

3.1.4 不变性

- 连通性不是可遗传性质. 也不是开遗传, 闭遗传的.

  例 3.6 $\mathbb{R}$ 是连通的, 其开, 闭子空间 $(-1,0)\cup(0,1)$, $[-1,0]\cup[1,2]$ 皆不连通.

- 连通性是连续映射下不变性质.
- 连通性是可乘性质.

3.2 局部连通

3.2.1 局部连通空间

定义 3.5

设 X 是一个拓扑空, 若任意 $x \in X$, 存在 x 的邻域基, 其中每个元皆是连通的 (称之为连通邻域基), 则称拓扑空间 X 是局部连通的.

下面举例子说明局部连通性与连通性无必然的联系.

例 3.7 连通而不局部连通的空间: 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中, 令

$$S = \left\{ (x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1] \right\}$$

$$T = \{0\} \times [-1,1]$$

S 是区间 $(0,1]$ 在一个连续映射下的像, 因此是连通的. 显然 T 是连通的, 且 S 和 T 不是隔离的 (因为 $T \subset \overline{S}$), 故 $S \cup T$ 是连通的. 由定义容易验证 $S \cup T$ 不是局部连通的.

例 3.8 局部连通而不连通的拓扑空间: 离散空间都是局部连通空间, 但包含着多于一个点的离散空间却不是连通空间. 又例如, 欧氏空间 $\mathbb{R}$ 的子集 $(0,1) \cup (1,2)$ 是局部连通的但不是连通的.

定理 3.5

设 X 是一拓扑空间, 则以下条件等价:

1. X 是一局部连通空间.
2. X 中任一开集的连通分支皆为开集.
3. X 有一基, 它的每个元都是连通的 (称之为连通基).

♡

3.2.2 不变性

- 局部连通性是可开遗传性质, 但不是可遗传性质.

  例 3.9 S 和 T 同例 3.7, 其中 $\mathbb{R}^2$ 是局部连通的但 $S \cup T$ 是其不局部连通的子空间.

- 局部连通性是连续开映射下不变的性质, 但不是连续映射下不变的性质.

  例 3.10 S 和 T 同例 3.7. 考察 $\mathbb{R}$ 的子空间 $Y = [-3,-1] \cup (0,1)$, 它是局部连通的. 定义 $f : Y \to S \cup T$,

$$f(x) = \begin{cases} (0, x+2), & x \in [-3,-1]. \\ (x, \sin \dfrac{1}{x}), & x \in (0,1). \end{cases}$$

  由粘结引理易知 f 是连续的, 但 $f(X) = S \cup T$ 不是局部连通的.

- 局部连通性质是有限可乘性质, 但不是可乘性质. 容易给出积空间局部连通的充要条件:

  定理 3.6

  设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族拓扑空间, 积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 是局部连通当且仅当 Γ 中有一有限子集 Γ_1, 使得当 $\gamma \in \Gamma$ 时 X_γ 局部连通, 当 $\gamma \in \Gamma - \Gamma_1$ 时 X_γ 是连通空间.

  ♡

3.3 道路连通

较之于连通空间的概念, 道路连通空间这个概念似觉更符合我们的直觉因而易于理解些, 我们先定义“道路”.

定义 3.6

设 X 是一个拓扑空间, 从单位闭区间 $[0,1]$ 到 X 的每一个连续映射 $f : [0,1] \to X$ 称为 X 中的一条道路.

♣

$f(0)$ 和 $f(1)$ 分别称为道路 f 的起点和终点. 当 $x = f(0)$ 和 $y = f(1)$ 时, 称 f 是 X 中 x 到 y 的一条道路. 起点和终点相同的道路称为回路, 此时它的起点 (也是终点) 称为回路的基点. 如果 f 是 x 中的一条道路, 则道路 f 的像集 $f([0,1])$ 称为 f 中的一条曲线, 并且这时道路 f 的起点和终点也分别称为曲线 $f([0,1])$ 的起点和终点.

3.3.1 道路连通空间

定义 3.7 设 X 是一个拓扑空间, 任意 $x, y \in X$, 存在 X 中 x 到 y 的道路, 则称 X 为道路连通空间. X 的子集 Y 称为 X 中道路连通的子集, 若它作为 X 的子空间是一个道路连通空间. ♣

道路连通性是比连通性更强的性质:

定理 3.7 拓扑空间 X 是一个道路连通空间, 则 X 必是连通空间. ♡

例 3.11 S 和 T 同例 3.7. $S \cup T$ 连通而不道路连通的.

道路连通与局部连通之间没有必然的蕴涵关系. 局部连通而不连通的空间自然不是道路连通的. 下面的例子也说明存在道路连通而不局部连通的空间.

例 3.12 S 和 T 同例 3.7. 令 $L = \{(x,0) \mid x \in [0,1]\}$, 则易知 $S \cup T \cup L$ 是道路连通的, 但它仍不是局部连通的.

3.3.2 道路连通分支

我们现在用与连通分支概念完全类似的方式建立道路连通分支的概念.

定义 3.8 设 X 是一个拓扑空间, $x, y \in X$. 若 X 中有从 x 到 y 的道路, 我们则称点 x 和 y 在 X 中道路连通. ♣

容易看出道路连通关系是自反和对称的, 为了说明 X 中道路连通关系是传递的, 我们需要如下命题:

命题 3.3. 粘结引理 X, Y 是拓扑空间, A 和 B 是 X 中两个开集 (闭集), 且 $X = A \cup B$. 若 $f_1 : A \to Y$, $f_2 : B \to Y$ 皆是连续的, 且

$$f_1|_{A\cap B} = f_2|_{A\cap B}$$

那么如下定义的映射 $f : X \to Y$ 是连续的.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ x \in A. \\ f_2(x), \ x \in B. \end{cases}$$

♠

定义 3.9

设 X 是一个拓扑空间, 对于 X 中的点的道路连通关系而言的每一个等价类称为拓扑空间 X 的一个道路连通分支. 如果 A 是拓扑空间 X 的一个子集. A 作为 X 的子空间的每一个道路连通分支称为 X 的子集 A 的一个道路连通分支.

拓扑空间 X 的子集 A 中的两个点 x 和 y 属于 A 的同一个道路连通分支的充分必要条件是 A 中有一从 x 到 y 的道路.

拓扑空间的道路连通子集的闭包不一定是道路连通的.

例 3.13 S 和 T 同例 3.7, 显然 S 是道路连通的, 而 $\overline{S} = S \cup T$ 不是道路连通的.

定理 3.8

设 X 是一拓扑空间, P 是拓扑空间 X 一道路连通分支, 则

1. 如果 A 是 X 道路连通子集, 并且 $A \cap P \neq \varnothing$, 则 $A \subset P$.
2. P 是一个道路连通子集.

注意 某点所在的连通道路分支是最大的包含该点的最大道路连通子集, 也是全体包含该点的道路连通子集的并.

用利用道路连通分支, 我们可以给出将一些道路连通的子集求并仍得到道路连通集的一个充分条件.

命题 3.4

X 是一拓扑空间, $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族道路连通子集. 若任意 $\alpha, \beta \in \Gamma$, 存在 Γ 中有限个元素 $\gamma_0, \cdots, \gamma_n$, 其中 $\gamma_0 = \alpha, \gamma_n = \beta$, 使得

$$Y_{\gamma_{i-1}} \cap Y_{\gamma_i} \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} Y_\gamma$ 是道路连通的.

3.3.3 不变性

- 道路连通性不是可遗传性质, 也不是开遗传或闭遗传的. 反例同例 3.6.
- 道路连通性是连续映射下不变性质.
- 道路连通性是可乘性质.

3.3.4 局部道路连通空间

何时能由连通推出道路连通? 首先我们回忆一个熟悉的结果:

命题

n 维欧氏空间 R^n 的任何一个连通开集都是道路连通的.

为了一般化这个命题, 同时连通与局部连通相对应, 我们引入局部道路连通的定义.

定义 3.10

设 X 是一个拓扑空, 若任意 $x \in X$, 存在 x 的邻域基, 其中每个元皆是道路连通的 (称之为道路连通邻域基), 则称拓扑空间 X 是局部道路连通的.

显然, 每个局部道路连通空间都是局部连通空间.

局部道路连通空间 X 中的一个开集 U 是 X 中一个道路连通子集当且仅当 U 是 X 中的一个连通子集.

定理 3.9

局部道路连通空间 X 中的一连通开集 U 必是道路连通的.

不变性

- 局部道路连通性质不是可 (开、闭) 遗传的. 反例同例 3.6.
- 局部道路连通性质是连续开映射下不变的, 但不是连续映射下不变的.

  例 3.14

- 局部道路连通性质是有限可乘的.比较局部连通空间积空间局部连通的定理

第 4 章 可数性

选择拓扑 $\mathcal{T}$ 的某个较小的子族 $\mathcal{B}$ 作为拓扑基, 可收到"用特殊对象表出一般对象",或者"用简单对象表出复杂对象"的效果. 选择拓扑基时首要的标准是, 它应含有尽可能少的集. 就常见的拓扑空间而言, 选取有限的拓扑基并无现实性, 因而不成为探讨的目标. 至于选取可数的拓扑基, 则对一大类拓扑空间是现实可行的, 且这些空间构成最有应用价值的拓扑空间的一部分.

对于邻域基亦可提出类似的问题. 这两方面的考虑导出互相平行的以下两个概念.

4.1 可数性公理

4.1.1 A_2 空间与 A_1 空间

定义 4.1

若拓扑空间有一可数基, 则称其满足第二可数性公理, 也称为 A_2 空间. ♣

注意 拓扑空间有可数基等价于有可数子基. 一般地, 拓扑空间的子基与其生成的基有相同基数, 证明只要用基数等式 $\aleph_0 \cdot \alpha = \alpha$, 其中 α 是任一无限基数.

定义 4.2

若拓扑空间每点处有一可数邻域基, 则称其满足第一可数性公理, 也称为 A_1 空间. ♣

注意 可以要求 A_1 空间每点处皆有一可数开邻域基, 更强的, 可要求此可数开邻域基关于包含关系是单调递减的.

例 4.1 度量空间, 离散空间皆为 A_1 空间, 实数空间 $\mathbb{R}$ 是 A_2 空间.

例 4.2 不满足第一可数性公理的空间: X 是包含着不可数个点的可数补空间, 则在它任一点处无可数邻域基.

否则 $x \in X$ 处有一个可数邻域基 $\mathcal{V}_x$. 任意 $x \neq y \in X$, $X - \{y\}$ 是 x 的开邻域, 故有开集 $U_y \in \mathcal{V}_x$ 使得 $U_y \subset X - \{y\}$, 即 $y \in X - U_y$. 注意

$$X - \{x\} \subset \bigcup_{y \in X - \{x\}} (X - U_y) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{V}_x} (X - U)$$

而 $\mathcal{V}_x$ 可数, $(X - U)$ 也可数, 而 $X - \{x\}$ 不可数, 矛盾!

命题 4.1

X 是 A_2 空间的充要条件是任意 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个基, 存在 X 的可数基 $\mathcal{B}_1$, 且 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$. 或者说, 每个基包含了一个可数基. ♠

注意 该命题有如下推广: $\mathcal{B}, \mathcal{B}_0$ 解是 X 同一个拓扑的基, 则存在该拓扑的基 $\mathcal{B}_1$, 满足 $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0$, 且 $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}|$.

命题 4.2

X 是 A_1 空间的充要条件是任意 $x \in X$ 的每个邻域基 $\mathcal{V}_x$, 有可数邻域基 $\mathcal{W}_x$, 且 $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{V}_x$. 或者说, 任一点的邻域基包含了一个该点的可数邻域基. ♠

4.1.2 A_2 与 A_1 的关系

第二可数性公理是比第一可数性公理强的性质:

定理 4.1

A_2 空间必是 A_1 空间. ♡

例 4.3 是 A_1 而不是 A_2 的空间: 包含着不可数个点的离散空间.

例 4.4 再举一个是 A_1 而不是 A_2 的空间: 实数下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$.

显然 $\mathbb{R}_l$ 是 A_1 的, 若它是 A_2 的, 则它的基 $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$ 包含了一可数基 $\mathcal{B}_1 = \{[a_n, b_n) \mid n \in \mathbb{N}^+\}$. 取 $r \notin \{a_n \mid n \in \mathbb{N}^+\}$, 则 $[r, r+1)$ 不是 $\mathcal{B}_1$ 中元素之并, 矛盾!

4.1.3 不变性

下面所说的可数性质, 指的是 A_1 性质或者 A_2 性质中的一种.

- 可数性在连续开映射下保持不变, 但不一定在商映射下保持不变.

  例 4.5 待补充: 第二可数的空间的商空间不是第一可数的例

- 可数性是可遗传性质.
- 可数性是可数可乘性质, 但不是可乘性质. 实际上我们有:

  定理 4.2

  $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族拓扑空间, 则积空间 $\Pi_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 是 A_2 (A_1) 的当且仅当存在 Γ 的可数子集 Γ_1: 当 $\gamma \in \Gamma_1$ 时, X_γ 是 A_2 (A_1) 的; 当 $\gamma \in \Gamma - \Gamma_1$ 时, X_γ 是平庸空间. ♡

4.2 可分性

定义 4.3

设 X 是一个拓扑空间,$D \subset X$. 若 $\overline{D} = X$, 则称 D 是 X 的稠密子集. ♣

以下命题从一个侧面说明了讨论拓扑空间中的稠密子集的意义.

命题

X 是拓扑空间, D 是 X 的稠密子集. $f, g : X \to \mathbb{R}$ 是连续的, 若 $f|_D = g|_D$, 则 $f = g$. ♠

注 将 $\mathbb{R}$ 换位任何 Hausdorff 空间皆成立.

我们也希望讨论有着较少“点数”稠密子集的拓扑空间,例如具有有限稠密点集的拓扑空间. 但这类拓扑空间比较简单, 大部分我们感兴趣的拓扑空间都不是这种情形, 讨论起来意思不大. 进而我们考察有可数稠密子集的拓扑空间.

定义 4.4

设 X 是一个拓扑空间, 若 X 有可数稠密子集, 称 X 是可分空间. ♣

4.2.1 可分性与可数性

我们主要讨论可分性与可数性的关系, 首先来看可分性和第二可数性:

定理 4.3

A_2 空间必是可分空间, 可分的度量空间必是 A_2 空间. ♡

我们指出可分性与第一可数性之间无必然的蕴涵关系, 来看下面的两个例子:

例 4.6 可分而不是第二可数 (自然不第一可数) 的空间: 实数下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$. 由例 4.4 知 $\mathbb{R}_l$ 不是 A_2 的, 但我们容易看出 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}_l$ 中稠密.

例 4.7 第一可数而不可分的空间: 含不可数个点的离散空间.

4.2.2 不变性

- 可分性是可开遗传性质, 但不是可遗传性质. 来看下面的例子:

  例 4.8 首先介绍一个令人惊讶的命题: 任一拓扑空间可嵌入某个可分空间.

  命题 4.3

  $(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, ∞ 是一个不在 X 中的元素. 令 $X^* = X \cup \{\infty\}$ 和 $\mathcal{T}^* = \{A \cup \{\infty\} \mid A \in \mathcal{T}\} \cup \{\varnothing\}$, 则有

  1. $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是一拓扑空间, 且 $(X,\mathcal{T})$ 是 $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 的子空间.
  2. $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是可分空间, $\{\infty\}$ 是其稠密子集.
  3. $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是 A_2 空间当且仅当 $(X,\mathcal{T})$ 是 A_2 空间. ♠

  由上述命题, 知可分空间的子空间可以不是可分空间: 选取 $(X,\mathcal{T})$ 为不可分空间, 但它是可分空间 $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 的子空间.
  同时上述命题也说明可分空间可以不是 A_2 的: 任取一不是 A_2 的空间 $(X,\mathcal{T})$, 由它得到可分空间 $(X^*,\mathcal{T}^*)$, 且该空间不是 A_2 的.

- 可分性是可数可乘性质, 但不是可乘性质.

  例 4.9 待补充: 一族可分空间的积空间不可分的例子, 我猜测 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 不是可分的.

- 可分性是是连续映射下不变性质.

4.3 Lindelöf 性质

定义 4.5

X 是一拓扑空间. 若 X 的每个开覆盖都有可数子覆盖, 则称 X 是 Lindelöf 空间. ♣

注意 Lindelöf 空间的定义中的开覆盖可以换成 $\mathcal{B}$-覆盖, 其中 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 此外与紧性的等价定义相对应, X 是 Linedelöf 空间等价于 X 中可数相交的闭集族有非空交.

例 4.10 实数下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 是 Lindelöf 空间.

$\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a < b, a,b \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}_l$ 的基, 且对 $\mathbb{R}$ 的任意 $\mathcal{B}$- 覆盖 $\mathcal{A}$, 令

$$X_0 = \{x \in \mathcal{R} \mid \text{ 若 } [a,b) \in \mathcal{A},\ x \in [a,b) \text{ 当且仅当 } x = a\}$$

容易看出 X_0 是可数集. 令

$$\mathcal{A}' = \{(a,b) \mid [a,b) \in \mathcal{A}\}$$

则 $\mathcal{A}'$ 是 $\mathbb{R} - X_0$ 的开覆盖 ($\mathbb{R} - X_0$ 上装备度量拓扑) . 它有可数子覆盖. 这样可见 $\mathcal{A}$ 有可数子覆盖. 故 $\mathbb{R}$ 是 Lindelöf 空间.

定理 4.4

A_2 空间必是 Lindelöf 空间. Lindelöf 的度量空间必是 A_2 空间. ♡

例 4.11 *Lindelöf* 而不第一可数 (自然不第二可数) 的空间: 含不可数个点的可数补空间. 由例 4.2 知, 含不可数个点的可数补空间不是 A_1 空间. 下证它是 Lindelöf 的. 若 $\mathcal{G}$ 是它的开覆盖, 取 $G \in \mathcal{G}$ 非空. 任意 $x \in G^c$, 有 $G_x \in \mathcal{G}$ 使得 $x \in G_x$. 注意 G^c 可数, 故 $\{G\} \cup \{G_x \mid x \in G^c\}$ 是一可数子覆盖. 于是知其为 Lindelöf 空间.

4.3.1 不变性

- Lindelöf 性质是可闭遗传性质, 但不是可遗传性质.

例 4.12 类似于例 4.8, 任一拓扑空间可嵌入某一 *Lindelöf* 空间.

命题 4.4

$(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, ∞ 是一个不在 X 中的元素. 令 $X^* = X \cup \{\infty\}$, $\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cup \{U \in \mathcal{P}(X^*) \mid \infty \in U, U - \{\infty\} \in \mathcal{T}, X^* - U$ 作为 X 子空间是 Lindelöf 空间.$\}$, 则有

1. $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是一拓扑空间, 且 $(X,\mathcal{T})$ 是 $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 的子空间.
2. $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是 Lindelöf 空间. ♠

由此也可知 Lindelöf 性质不是可遗传性质.

- Lindelöf 性质不是有限可乘性质.

例 4.13 由例 4.10, 知 $\mathbb{R}_l$ 是 Lindelöf 的. 但 $\mathbb{R}_l^2$ 不是 Lindelöf 的. 这是因为其子集

$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}_l^2 \mid x + y = 1\right\}$ 是 $\mathbb{R}_l^2$ 中闭集, 但作为子空间是具有不可数个点的离散空间, 不是 Lindelöf 的, 由 Lindelöf 性质可闭遗传即知.

- Lindelöf 性质是连续映射下不变性质.

本章小结

本章讨论了拓扑空间中与元素个数有关的三个性质:

一是可数性. 有可数基的拓扑空间称为第二可数的, 每一点有可数邻域基的拓扑空间称为第一可数的. 第二可数性严格强于第一可数性质. 这两种可数性皆可遗传, 可数可乘, 在连续开映射下不变.

二是可分性. 有可数稠密集的拓扑空间称为可分的. 第二可数性严格蕴涵了可分性, 但在度量空间中二者等价. 第一可数性与可分性无相互蕴涵关系. 有一个令人惊讶的结果是: 任何拓扑空间可嵌入到某个可分空间中. 这也说明了可分性不可遗传. 但可分性是开遗传的, 且可数可乘, 在连续映射下不变.

三是 Lindelöf 性质. Lindel"of 性质与紧性较为相似, 拓扑空间的任何开覆盖存在可数 (有限) 子覆盖, 则称拓扑空间为 Lindelöf (紧) 的. 第二可数性严格蕴涵了 Lindelöf 性质, 但在度量空间中二者是等价的. Lindelöf 性质与第一可数性无相互蕴涵关系. 与任一拓扑空间可以嵌入某个可分空间类似, 任一拓扑空间也可嵌入某个 Lindelöf 空间, 从而容易知道 Lindelöf 性质不是可遗传的, 但是 Lindelöf 性质是闭遗传的. 很遗憾, Lindelöf 性质甚至不是有限可乘的, 但 Lindelöf 性质是连续开映射下不变的.

第 5 章 分离性

为了介绍分离性, 首先将点的邻域的概念推广到集的邻域:

定义

X 是一拓扑空间, $A \subset X$. 称 $\mathscr{N}_A = \{V \subset X : A \subset V^\circ\}$ 为 A 的邻域系, 每个 $V \in \mathscr{N}_A$ 称为 A 的邻域.

利用集的邻域的概念, 我们可以讨论集合的 "分离":

X 是一拓扑空间, $A, B \subset X$, 若有 $U \in \mathscr{N}_A, V \in \mathscr{N}_B$ 使得 $U \cap V = \varnothing$, 则称 U 与 V 分离 A 与 B, 并说 A 与 B 可邻域分离. 若 U, V 皆是开 (闭) 集, 就称 A 与 B 可开 (闭) 邻域分离.

由邻域的定义可直接看出, 若 U,V 分离 A 与 B, 则 U°, V° 亦分离 A 与 B, 故 A 与 B 被开邻域分离. 这样, 邻域分离等价于开邻域分离.

5.1 T_0, T_1, T_2 空间

5.1.1 T_0, T_1 空间

先介绍最简单的分离性, T_0 分离性的定义:

定义 5.1

X 是一拓扑空间. 称 X 是 T_0 空间, 若任意 $x, y \in X, x \neq y$, 则或者 x 有一开邻域 U 使得 $y \notin U$, 或者 y 有一开邻域 V 使得 $x \notin V$.

T_0 分离性有如下的等价描述:

定理 5.1

拓扑空间 X 是 T_0 的当且仅当任意 $x, y \in X, x \neq y$ 有 $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.

加强一下 T_0 分离性, 我们给出 T_1 分离性的定义:

定义 5.2

X 是一拓扑空间. 称 X 是 T_1 空间, 若任意 $x, y \in X, x \neq y$, 则 x 有一开邻域 U 使得 $y \notin U$.

T_1 分离性有如下的等价描述:

定理 5.2

$(X, \mathcal{T})$ 是一拓扑空间, 则以下条件等价:

1. X 是 T_1 空间.
2. X 中每个单点集是闭集.
3. X 中每个有限子集是闭集.

4. 若记 X 上的有限补拓扑为 $\mathcal{T}_0$, 则 $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$.

下面的命题表明,T_1 空间中关于凝聚点的性质和我们在数学分析中熟知的多了一些类似之处.

命题 5.1

X 是 T_1 空间, $A \subset X$. 则 $x \in d(A)$ 当且仅当 x 的任意邻域 U, $U \cap A$ 是无限集.

注 由此可知 T_1 空间中任一集合的导集是闭集.

T_0 与 T_1 的关系

- T_1 分离性蕴含了 T_0 分离性.
- 存在不是 T_1 的 T_0 空间:

  例 5.1 $X = \{0,1\}, \mathscr{T} = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, 则空间 $(X, \mathscr{T})$ 是 T_0 但不是 T_1 的.

5.1.2 T_2 空间

定义 5.3

X 是一拓扑空间. 称 X 是 T_2 空间 (或 Hausdorff 空间), 若任一对相异点可邻域分离.

T_2 分离性有如下等价描述:

定理 5.3

X 是一拓扑空间, 则以下条件等价:

1. X 是 T_2 空间.
2. X 中任何收敛的网极限是唯一的.
3. 积空间 $X \times X$ 中的对角线 $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ 为闭集.

T_1 与 T_2 的关系

- T_2 分离性蕴含了 T_1 分离性.
- 存在不是 T_2 的 T_1 空间:

  例 5.2 记 X 是一含着无限个点的有限补空间. 显然 X 是 T_1 空间. 而 X 中任何两非空的开集有非空交. 因为 X 中每个非空开集是 X 中某有限子集的补集, 而 X 又是无限集. 由此易见 X 不是 T_2 空间.

5.1.3 不变性

- T_0, T_1, T_2 性质皆是可遗传性质.
- T_0, T_1, T_2 性质皆是可乘性质.

- T_0, T_1, T_2 性质皆非可商性质, 故亦皆非连续映射下不变性质.

  例 5.3

注意 商空间往往分离性很差, 这是一个被普遍注意到且令人遗憾的事实. 究其原因, 实际上在于形成商空间的“粘合”的高度随意与怪异, 导致分离性很差的商拓扑是可以预计的.

命题 5.2

设 X 是一个拓扑空间, $\sim$ 是 X 中的一个等价关系,$p: X \to X/\sim$ 是自然投影. 证明: 商空间 $X/\sim$ 是 T_1 空间当且仅当任意 $\tilde{x} \in X/\sim$, 集合 $p^{-1}(\tilde{x})$ 是 X 中的闭集.

5.2 正则空间, T_3 空间

5.2.1 正则空间, T_3 空间

定义 5.4

X 是一拓扑空间. 称 X 是正则空间 (Regular Space), 若 X 中任一点与不含该点的闭集可邻域分离. 正则的 T_1 空间称为 T_3 空间.

正则性有如下的等价描述:

定理 5.4

X 是一拓扑空间, 则以下条件等价:

1. X 是正则空间.
2. X 中任一点与不含该点的闭集可闭邻域分离.
3. X 中任一点有一闭邻域基.

注 上述正则性的等价描述中, 第三条是本质且方便使用的.

T_0, T_1, T_2 与正则性无相互蕴含的关系

- 存在正则 (且正规) 但不 T_0 的空间:

  例 5.4

- 存在 T_2 但不正则的空间:

  例 5.5

T_2, T_3 的关系

- T_3 分离性蕴含了 T_2 分离性.
- 存在不是 T_3 的 T_2 空间:

  例 5.6

5.2.2 不变性

- 正则, T_3 性质皆是可遗传性质.
- 正则, T_3 性质皆是可乘性质.
- 正则, T_3 性质皆非可商性质, 故亦皆非连续映射下不变性质.

例 5.7

5.3 完全正则空间, $T_{3.5}$ 空间

5.3.1 零集, 余零集, 可连续函数分离

前文讨论的分离性皆是用开集来分离不相交的集合, 另一种自然的想法当然是用连续函数来分离集合, 为此先做一些准备工作, 说清楚到底怎样算是连续函数分离集合.

根据我们数学分析中所学的知识, 令 $X = \mathbb{R}^n$, f 是 X 上 (满足一定正则性条件的) 连续可微函数, 则 $\{f = 0\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中超曲面. 若 X 是度量空间, $f(x) = \min\{d(x,a) - r, 0\}$, $a \in X$, $r > 0$ 则 $\{f \neq 0\}$ 是 X 中的球 $B(a,r)$. 在一般拓扑空间中, 不存在曲面的概念, 但仍可以考虑类似的集合:

定义

X 是一拓扑空间, $A \subset X$. 若存在 $f \in C(X)$, 使得 $A = \{f = 0\}$, 则称 A 为 f 的零集, 称 $A^c = \{f \neq 0\}$ 为 f 的支撑或支撑集 (support set).

注 连续函数的零集一定是闭集, 连续函数的支撑必是开集.

若 A 是某个连续函数的零集, 即存在 f 为连续函数, 使得 $A = \{f = 0\}$. 我们自然可以改变一些 f 的要求, 例如要求 f 是有界的, 将 f 的值域限制在 $[0,1]$ 是很方便的. 那么此时 A 是一个满足上述要求的函数的零集呢?

命题

X 为一拓扑空间, A 是 X 的非空子集. 则 A 是某连续函数的零集 (或连续函数的支撑) 当且仅当存在 $f \in C(X,[0,1])$, 使得 $A = \{f = 0\}$ (或 $A = \{f > 0\}$) .

定义

X 是一拓扑空间, A, B 是 X 的非空子集. 若存在 $f \in C(X)$, 和 $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$ 使得 $f(A) = \{\alpha\}, f(B) = \{\beta\}$, 则称 A 与 B 可连续函数分离, 且说 f 分离 A 与 B .

命题

X 是一拓扑空间, 非空集 $A, B \subset X$, 则下面命题等价

1. A 与 B 可连续函数分离.
2. 存在 $f \in C(X)$, 使得 $d(f(A), f(B)) > 0$.
3. 存在 $f \in C(X,[0,1])$, 使得 $f(A) = \{0\}, f(B) = \{1\}$

5.3.2 完全正则空间, $T_{3.5}$ 空间

定义 5.5

X 是一拓扑空间. 称 X 是完全正则空间, 若 X 中任一点与不含该点的闭集可连续函数分离. 完全正则的 T_1 空间称为 $T_{3.5}$ 空间. ♣

完全正则性有如下的等价描述:

定理 5.5

拓扑空间 X 完全正则当且仅当 X 中任一点有一个由连续函数的支撑构成的邻域基. ♡

注 我们已经提过, 连续函数的支撑可看作球的某种替代物. 在这种理解下, 可以说定理 5.5 表明了完全正则空间是度量空间的某种推广.

对于 $T_{3.5}$ 空间有下面**绝妙**的描述:

定理 5.6. 嵌入定理

X 是拓扑空间, 记 $X^* = C(X, \mathbb{R})$ 是 X 上的连续函数全体, 并赋点式收敛拓扑. $X^{**} = C(X^*, \mathbb{R})$ 也赋点式收敛拓扑. 定义映射 J

$$J : X \to X^{**} \ ; \ x \mapsto J_x$$

$$J_x : X^* \to \mathbb{R} \ ; \ f \mapsto f(x)$$

易知任意 $x \in X$, J_x 是 X^* 上的连续函数, 即 J 定义合理, 则有:

X 是 $T_{3.5}$ 空间当且仅当 J 是嵌入映射, 称之为自然嵌入. ♡

定理 . 嵌入定理另一叙述

X 是 $T_{3.5}$ 空间当且仅当存在拓扑空间 Ω, 使得 X 同胚于 $C(\Omega)$ 的某个子空间. ♡

注意 定理 5.6 是我们所获得的第一个重要嵌入定理. 所谓嵌入定理, 就是断定某类空间 (如 $T_{3.5}$ 空间) 可嵌入一种标准形式的空间 (如 $C(\Omega)$). 一旦获得了这样的结果, 原则上, 对该类空间的研究就完全归结为对所提到的标准空间及其子空间的研究. 在这种意义上可以说, 对于该类空间的拓扑结构就有了一个完全的描述. 正因为如此, 在拓扑空间理论中, 嵌入定理有特别重要的意义. 但嵌入定理的获得却远不是常有的事, 它必然依赖于对空间的较强的假设. 定理 5.6的建立, 正表明全正则性是一个十分特殊的拓扑性质.

完全正则与正则, $T_{3.5}$ 与 T_3 的关系

- 完全正则性蕴含了正则性, 故 $T_{3.5}$ 分离性蕴含了 T_3 分离性.
- 存在不是 $T_{3.5}$ 的 T_3 空间 (自然也是正则而不完全正则的空间):

  例 5.8

5.3.3 不变性

- 完全正则, $T_{3.5}$ 性质皆是可遗传性质.

- 完全正则, $T_{3.5}$ 性质皆是可乘性质.
- 完全正则, $T_{3.5}$ 性质皆非可商性质, 故亦皆非连续映射下不变性质.

例 5.9

5.4 正规空间, T_4 空间

5.4.1 正规空间, T_4 空间

定义 5.6

X 是一拓扑空间. 称 X 是正规空间 (Normal Space). 若 X 中互不相交的闭集可邻域分离. 正规的 T_1 空间称为 T_4 空间.

正规性有如下等价描述:

定理 5.7

拓扑空间 X 正规当且仅当 X 中任闭集有由闭邻域基.

注 与正则性的定价描述相似, 正规性也等价于两不相交闭集可闭邻域分离.

与之前正则性质和完全正则性质比较, 我们也可以用连续函数分离闭集. 显然连续函数分离闭集, 按照之前的定义, 显然蕴涵的开集分离闭集. 似乎我们要再定义一种" 完全正规" 性质, 但下面的定理告诉我们: 用开集分离闭集和用连续函数分离闭集是等价的:

定理 5.8. Urysohn 引理

拓扑空间 X 正规当且仅当两非空不交闭集可连续函数分离.

利用 Urysohn 引理, 我们可以证明下面深刻的定理:

定理 5.9. Tietze 定理

拓扑空间 X 正规当且仅当任意非空闭集 $A \subset X$ 和 $f \in C(A)$, 存在 $g \in C(X)$ 满足

1. $f|_A = g|_A$.
2. $\sup_{x\in A} |f(x)| = \sup_{x\in X} |g(x)|$.

注意 Urysohn 定理与 Tietze 定理是拓扑空间理论中的重要结果之一. Urysohn 定理表明, 对于闭集的邻域分离与连续函数分离实质上等价. 与此相对照, 我们知道点与闭集的邻域分离 (正则性) 与连续函数分离 (全正则性) 并不等价.Tietze 定理表明, 正规空间的闭子空间上的连续函数总可连续地扩张到全空间上. 这一结论即使在很特殊的空间 $\mathbb{R}^n$ 甚至 R 上也不是显然的. 结合这定理5.8 与定理5.9, 我们知道闭集的函数分离性与闭集上连续函数的可扩张性原不过是一回事, 而在表面上看来, 二者的差别是很大的. 由此足见定理5.8 与定理5.9 的深刻性. 顺便指出, 分离性与函数扩张性质之间的深刻内在联系是一个颇具普遍意义的问题, 这一类的结果亦出现在抽象空间理论的其他领域.

$T_{3.5}$ 与 T_4 的关系

- T_4 分离性蕴含了 $T_{3.5}$ 分离性.
- 存在不是 T_4 的 $T_{3.5}$ 空间 (自然也是正则而不完全正则的空间):

  例 5.10

5.4.2 正则, 完全正则, 正规的关系

定理 5.10 每一个正则且正规的空间都是完全正则空间.

定理 5.11. Tychonoff 定理 每一个正则的 Lindelöf 空间都是正规空间.

5.4.3 不变性

由 T_4 空间必是 $T_{3.5}$ 空间, 加上嵌入定理 (定理 5.6) , T_4 空间必可拓扑嵌入到某个空间 $C(\Omega)$. 但并不能说明, 凡可拓扑嵌入某个 $C(\Omega)$ 的拓扑空间都是正规空间; 否则, 正规性就等同于全正则性了. 在这个意义上, 对于正规性缺少如同定理 5.6那样的嵌入定理. 在一定程度上正是这个原因, 使得正规性在某些方面远不如全正则性那样便于处理. 例如, 正规性既不是遗传的, 也不是可乘的, 甚至不是有限可乘的: 两个正规空间的积空间就未必是正规空间. 在这些方面, 正规性显示出其难以把握甚至病态的一面. 鉴于度量空间总是正规空间, 不可能在度量空间的范围内去寻找这种似乎属于病态的反例.

- 正规, T_4 性质皆非可遗传性质, 但是是闭遗传的.
  何时一个正规空间的子空间也是正规的? 我们称这样的空间是完全正规或者遗传正规的, 对于这样的空有如下的等价描述:

  命题 5.3 拓扑空间 X 完全正规, 当且仅当 X 中任意两隔离集可邻域分离.

- 正规, T_4 性质皆非可乘性质.

  例 5.11 $\mathbb{R}_l$ 是 T_4 空间, 但是 $\mathbb{R}_l^2$ 不是正规空间, 进而不是 T_4 空间.

- 正规, T_4 性质皆非可商性质, 故亦皆非连续映射下不变性质.

  例 5.12 $\mathbb{R}$ 是 T_4 空间, 其商空间 $\{(-\infty,1]\cap\mathbb{Q},\ (-\infty,1]-\mathbb{Q},\ (-1,1),\ [1,\infty)\}$ 不是正规的, 也不是 T_0 的.

第 6 章 紧性

在上节中, 已接触到某些有一定深度的拓扑定理. 但我们一直因其不能推广于拓扑空间而深以为憾的那些经典定理, 特别是关于连续函数的极值定理, 却仍然未曾触及. 这就表明, 除了分离性之外, 还需考虑应附加到拓扑空间的另外一些假设, 最重要者就要数紧性了, 这正是本章所要考虑的.

如同分离性一样, 紧性也不是一个单一的拓扑性质, 而是一系列相近拓扑性质的总称. 在这个意义上, 关于紧性的理论是庞大而复杂的, 它占据了拓扑空间理论的一个相当大的部分, 其重要性是无庸置疑的. 不过, 本章仅涉及比较基本的内容, 这部分内容与我们熟知的许多经典定理 (如有限覆盖定理,Bolzano-Weierstrass 定理) 有比较直接的联系, 因而较容易理解与运用; 而且, 在应用上也是最重要的.

6.1 紧空间

6.1.1 紧集, 紧空间

我们将使得有限覆盖定理集合成立的抽象为紧集:

定义 6.1

X 是一个拓扑空间. $Y \subset X$, 若 Y 在 X 中的每个开覆盖有有限子覆盖, 则称 Y 为紧集; 若 $\overline{Y}$ 为紧集, 则称 Y 为相对紧集. 若 X 自身为紧集, 则称 X 为紧空间.

注意 利用定义容易发现, Y 是 X 中紧集当且仅当 Y 作为 X 的子空间是紧空间. 因此, 紧集与紧空间在概念上是统一的; 凡对于紧空间得出的结论, 均可用于紧集, 反之亦然.

根据定义, 我们可以看出下面的几个简单性质.

1. X 的有限子集显然是紧集.
2. X 中有限个紧集的并仍是紧集.
3. 每一个紧空间都是 Lindelöf 空间. 但反之不然, 例如包含着可列个点的离散空间, 与 $\mathbb{R}$ 皆是 Lindelöf 空间, 但不是紧空间.

下面我们给出紧性的等价刻画, 他们无疑是十分重要的.

定理 6.1. 紧性等价描述一 (Alexander)

$\mathcal{S}$ 是拓扑空间 X 的子基. X 是紧空间当且仅当 X 的任一 $\mathcal{S}$-覆盖有有限的子覆盖.

注意 该定理可大大简化紧性的判定. 试看下面这个简单例子: 为对 $X = [a, b]$ 证明有限覆盖定理, 由 Alexander 定理, 只需证明从 X 的如下覆盖

$$\mathscr{U} = \{[a, \beta_i) \mid i \in I\} \cup \left\{\left(\alpha_j, b\right] \mid j \in J\right\}$$

可取出有限子覆盖, 其中 $\beta_i > a$, $\alpha_j < b$.

定理 6.2. 紧性等价描述二

X 是紧空间当且仅当 X 中任一具有有限交性质的闭集族有非空交.

注意 由该定理可知紧空间中成立"闭集套定理": 任何非空闭集组成的套有非空交集. 但是成立闭集套定理的空间是不是紧空间呢? 我还不知道.

定理 6.3. 紧性等价描述三: 广义 Bolzano-Weierstrass 定理)

X 是紧空间当且仅当 X 中任一网有收敛子网, 也即任一网皆有聚点.

注意 该定理使我们想起 Bolzano-Weierstrass 定理: 有界实数列必有收敛子列. 可以说, 紧空间正是使聚点原理成立的拓扑空间. 这表明, 通过紧空间这一概念, 实现了有限覆盖定理与"Bolzano-Weierstrass 定理"的某种统一. 这不能不说是拓扑空间理论的一项重要成就, 它给人的印象是异乎寻常的. 唯一不能令人满意的是, 在定理 6.3 中使用网而不是序列, 这确实带来不便. 不过, 对于紧性的许多应用来说, 真正重要的是"收敛子网的存在性", 至于这种子网如何构成及是否便于运用, 都未必是要紧的.

6.1.2 不变性

- 紧性是可闭遗传性质, 但不是可开遗传性质, 自然也不是可遗传性质.

  例 6.1 $[a,b]$ 是一紧空间, 其子空间 (a,b) 不紧.

  实际上, 任何拓扑空间是一紧空间的开子空间, 看下面的命题:

  命题 6.1. 单点紧化

  $(X,\mathcal{T})$ 是一拓扑空间, ∞ 是不属于 X 的元素, 令 $X^* = X \cup \{\infty\}$, 且

  $$\mathcal{T}^* = \mathcal{T} \cap \{A \cup \{\infty\} \mid A \in \mathcal{T}, X - A\text{为}X\text{中紧集}\} \cup \{X^*\}$$

  则有:

  1. $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 是紧空间,
  2. $(X,\mathcal{T})$ 是其开子空间.

  通常称 $(X^*,\mathcal{T}^*)$ 为拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的单点紧化.

  例如, $\mathbb{R}$ 的单点紧化为 S^1, $\mathbb{R}^2$ 的单点紧化为 S^2.
- 紧性是可乘性质. 这是拓扑学中最重要的基本结果之一, 以 Tychonoff 定理著称, 其证法甚多, 其中任何一种证法都不能实质上避开选择公理, Kelley 证明了选择公理可从 Tychonoff 定理推出.
- 紧性是连续映射下不变性质. 由此性质立得极值原理.

6.1.3 紧性与分离性

在本节中我们把诸分离性公理和紧性放在一起进行考察. 我们将会发现在紧空间中分离性公理变得十分简单了, 或者说紧性加强了分离性. 此外在本节的后半部分, 我们给出从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射的一个十分重要的性质.

首先我们来考察 Hausdorff 空间中的紧集:

定理 6.4
Hausdorff 空间中两不交的紧集可邻域分离.

推论 6.1
Hausdorff 空间中紧集必是闭集. 特别的, 紧 Hausdorff 空间中紧集等价于闭集.

推论 6.2
紧 Hausdorff 空间是 T_4 空间.

下面我们来考察正则空间与完全正则空间中的紧集:

定理 6.5
正则空间中任一紧集有一闭邻域基, 完全正则空间中任一紧集有一个由连续函数的支集组成的邻域基.

推论 6.3
紧正则空间必是紧正规空间, 紧正则空间等价于紧完全正则空间.

注意, 紧的正规空间而可以不是正则空间, 下面举一个反例:

例 6.2 $X = \{1,2,3\}, \mathcal{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. 容易判断这是一正规而非正则空间, 且只含有有限多个点, 当然是紧致的.

6.2 序列紧, 可数紧, 列紧

在将定理 6.3 比拟于 Bolzano-Weierstrass 定理时, 我们曾不满于其中所用的是网而不是序列. 如果改用序列, 则所得的是另一种紧性概念, 即所谓序列紧性. 本节处理包括序列紧在内的三种紧性, 它们的重要性虽然不及定义6.1意义下的紧性, 但有一个明显的好处, 即能在某种 "可数的形式" 下处理, 因而有关结论更接近于一些熟知的经典定理 (如 Bolzano-Weierstrass 定理与区间套定理).

定义 6.2
X 是一拓扑空间.
1. 称 X 为序列紧空间, 若 X 中任何序列有收敛子列.
2. 称 X 为可数紧空间, 若 X 的任何可数开覆盖有有限子覆盖.
3. 称 X 为子集紧空间或列紧空间, 若 X 的任何无限子集有聚点.

如同紧集一样, 自然亦可考虑序列紧集、可数紧集与聚点紧集. $Y \subset X$, 称 Y 是序列紧集, 若 Y 中任何序列有收敛子列收敛于 Y 中的点; 称 Y 为可数紧集, 若 Y 在 X 中任何可数开覆盖有有限子覆盖; 称 Y 为子集紧集, 若 Y 的任何无限子集有在 Y 中的聚点.

但这种考虑并不增加实质上新的内容, 实际上 Y 是 X 中序列紧集, 可数紧集, 子集紧集当且仅当 Y 作为 X 的子空间是序列紧, 可数紧, 子集紧的. 故下面讨论只对空间进行.

三种紧性中, 形式上显然以可数紧性最接近于紧性, 故先考虑对可数紧性的等价描述.

定理 6.6. 可数紧的等价描述: 闭集套定理

X 是一拓扑空间, 则以下命题互相等价:

1. X 是可数紧空间.
2. 任一 X 中具有有限交性质的闭集列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, 有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} B_n \neq \varnothing$.
3. 任一 X 中递减的非空闭集列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, 有 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} B_n \neq \varnothing$.
4. 任一 X 中的序列有聚点.

注意 定理 6.6 中特别令人感兴趣的是命题 3, 它不免使人联想起分析中的 Cantor 闭区间套定理. 在这个意义上可以说, 可数紧空间就是使闭集套定理或 Cantor 定理成立的空间. 此外还要注意, 定理 6.6 中的命题 4 , 并不能推出任一序列有收敛子列, 而只能推出任一序列有收敛子网.

6.2.1 四种紧性的蕴含关系

现在我们已定义了四种不同意义的“紧性”了, 它们在形式上的差别是显然易见的, 但实质性的逻辑关系则尚不清楚, 而这无疑是我们急于要了解的. 这一问题的完全解决并不简单, 但得出如下的部分结论无太多困难:

- 关于序列紧与可数紧的关系, 我们有:

  定理 6.7

  序列紧空间是可数紧空间, 可数紧的 A_1 空间是序列紧空间.

- 关于可数紧与子集紧的关系, 我们有:

  定理 6.8

  可数紧空间是子集紧空间, 子集紧的 T_1 空间是可数紧空间.

  此外, 我们给出一个子集紧但不可数紧 (自然不序列紧也不紧) 的空间:

  例 6.3 全体正整数 $\mathbb{N}^+$, 赋以 $\mathcal{B} = \{\{2n-1, 2n\} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ 为基的拓扑. 容易验证这是一个子集紧但不可数紧的空间.

- 关于紧性与可数紧性, 容易看出:

  定理 6.9

  紧空间必是可数紧空间, 可数紧的 Lindelöf 空间是紧空间.

  此外我们指出, 存在序列紧 (自然是可数紧) 而不紧的拓扑空间. 具体的例子可参见汪林所著的《拓扑空间与线性拓扑空间中的反例》第六章例 3.

令人感到满意的是, 紧性, 序列紧, 可数紧, 子集紧在度量空间中是等价的. 根据上面

的分析, 只需要证明序列紧的度量空间是紧空间即可, 可以用 Lebesgue 数来证明, 也可从

$$\text{序列紧} \Leftrightarrow \text{全有界} + \text{完备} \Leftrightarrow \text{紧}$$

看出.

6.2.2 不变性

- 子集紧, 可数紧, 序列紧皆不是可遗传性质.

  例 6.4 $[a,b]$ 带通常距离是紧集, 故是子集紧, 可数紧, 序列紧的. 其度量子空间 (a,b) 不是紧集, 故不是子集紧, 可数紧, 序列紧的.

- 可数紧, 序列紧是可数可乘性质, 但不是可乘性质.

  例 6.5 单位闭区间 $I=[0,1]$ 装备通常拓扑, 显然 I 是序列紧的. 令 $X=I^I$. 下面我们说明 X 不是序列紧的. 定义 $\alpha_n \in X$ $(n=1,2,\cdots)$ 如下: $\alpha_n(x)$ 取 $x\in I$ 的 (无限位) 二进制表示中第 n 个数字. 若 $\{\alpha_n\}$ 有收敛子列 $\{\alpha_{n_k}\}$ 收敛于 $\alpha\in X$. 则任意 $x\in X$, $\alpha_{n_k}(x)$ 在 I 内收敛于 $\alpha(x)$. 取 $x\in I$, 使其二进制表示式中在奇数位置上是 0, 在偶数位置上是 1

- 可数紧, 序列紧是连续映射下不变性质. 子集紧不是可商性质, 自然也不是连续映射下不变性质.

  例 6.6 $\mathbb{N}^+$ 上装备的拓扑同例 6.3, 是一子集紧空间. 将 $2n-1$ 与 $2n$ 视为同一, 得到一商空间. 容易看出此商空间是含可数个点的离散空间, 故不是子集紧空间.

6.3 局部紧空间

紧拓扑空间并不特别具有普遍性, 举出非紧空间的例子易如反掌: 我们所熟知的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 就不是紧空间! 不过, 对于局部问题, 只要有某种" 局部紧性", 就同样能充分发挥紧集及" 紧性论证" 的作用. 下面就来介绍局部紧空间.

定义 6.3

X 是一拓扑空间. 若 X 中每点有一紧邻域, 则称 X 为局部紧空间. ♣

从应用方便的角度考虑, 通常将 T_2 分离性与局部紧性结合起来, 以 LCH (Locally Compact Hausdorff) 记局部紧的 Hausdorff 空间. 与一般局部紧空间比较,LCH 有更好的性质, 且又不失普遍性: LCH 在应用中极为常见, 如 $\mathbb{R}^n$ 的开 (或闭) 子空间均为 LCH; 在现代数学中处于重要地位的 (有限维) 拓扑流形也是 LCH. LCH 具有一系列良好的性质, 先来看一个最最基本的性质.

命题 6.2

X 是 LCH, 则 X 中任一点有一紧邻域基. ♠

LCH 是局部 T_4 的 (即其中每点有一邻域作为子空间是 T_4 的). 因此有下面类似于 T_4 空间的性质, 请与定理 5.7, 定理 5.8, 定理 5.9 相比较.

定理 6.10

X 是 LCH, 则有下面的命题成立:

1. X 中任一紧集有一紧邻域基.
2. X 中任何两个不交的紧集与闭集可用有相对紧支集的连续函数分离.
3. X 中任一紧集上的某个连续函数可 (保持上界地) 延拓为 X 上具有相对紧支集的连续函数.

注意 容易看出上面定理 6.10 中的 2 也等价于, X 中任一紧集有一由相对紧的连续函数支集构成的邻域基. 注意单点集是紧集, 故由 2 可知 LCH 一定是 $T_{3.5}$ 空间.

6.3.1 不变性

- 局部紧性是闭遗传性质.
- 局部紧性是有限可乘的. 更具体地, 有如下命题:

命题 6.3

$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族拓扑空间. 则积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 局部紧空间当且仅当 Γ 中有一有限子集 Γ_1 使得当 $\gamma\in\Gamma_1$ 时 X_γ 是局部紧空间, $\gamma\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_γ 是紧空间.

- 局部紧在连续开映射下保持不变.

附: Lindelöf 的 LCH

我们介绍一个研究流形上的微积分的常用定理:

定理

X 是 Lindelöf 的 LCH, 则 X 有一紧穷竭序列, 即存在 X 中的紧集列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$, 满足:

1. $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+} K_n$.
2. $K_n\subset K_{n+1}^\circ$

由上述引理 (不借助定理 6.14) 可以证明:

定理

X 是 Lindelöf 的 LCH, 则 X 是仿紧的.

6.4 仿紧空间

我们对紧性这个概念从两方面加以推广: 一是推广为局部紧空间, 另一是推广为仿紧空间. 研究的结果表明, 这两者都在很大的程度上保持着紧致空间的特色.

为了引入仿紧空间, 先引入一些基本的定义: 局部有限族和覆盖的加细.

6.4.1 局部有限族, 覆盖的加细

定义 6.4

拓扑空间 X 的一个子集族 $\mathcal{A}$ 称为局部有限族, 若 X 中的任一点有一邻域, 使得该邻域只与子集族 $\mathcal{A}$ 中的有限个子集相交.

局部有限族有下面的简单而重要的性质, 在定理 6.11 , 定理 6.12 中可以看出其威力, 这也可以理解为定义局部有限族的动机.

命题 6.4

$\mathcal{A}$ 是拓扑空间 X 的局部有限族, 则

1. $\{\overline{A} \mid A \in \mathcal{A}\}$ 是局部有限族.
2. $\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A} = \bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} \overline{A}$, $\left(\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A\right)^{\circ} = \bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A^{\circ}$

定义 6.5

X 是一拓扑空间, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 皆是 X 的覆盖. 若 $\mathcal{A}$ 中每个元素包含于 $\mathcal{B}$ 中某个元素中, 则称 $\mathcal{A}$ 是覆盖 $\mathcal{B}$ 的加细.

注 显然, 若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的一个子覆盖, 则 $\mathcal{A}$ 是覆盖 $\mathcal{B}$ 的一个加细.

我们也可以用加细来描述之前和覆盖、子覆盖有关的性质: Lindelöf 性质与紧性.

命题 6.5

拓扑空间 X 是一个紧致空间 (Lindelof 空间) 当且仅当 X 的任一开覆盖有一有限 (可数) 开覆盖是其加细.

6.4.2 仿紧空间

定义 6.6

设 X 是一个拓扑空间. 称 X 是仿紧的, 若 X 的任一开覆盖有一局部有限开覆盖是其加细.

例如, 紧致空间自然是仿紧致的. 离散空间也是仿紧致的, 因为所有单点集构成的集族是离散空间的一个开覆盖并且是它的任何一个开覆盖的局部有限的加细.

我们知道紧性结合正则性蕴含正规性, 紧性结合 T_2 分离性蕴含了 T_4 分离性, 下面的定理告诉我们实际上只需要仿紧性就够了.

定理 6.11

仿紧的正则空间是正规空间.

定理 6.12

仿紧的 T_2 空间是 T_4 空间.

我们知道紧性蕴含了仿紧性, 而仿紧性加上什么条件可以得出紧性? 下面的定理回答了这个问题.

定理 6.13

X 是一拓扑空间. 则 X 是紧空间当且仅当 X 是仿紧的可数紧空间.

什么样的空间是仿紧的? 如果按照定义来判别一个空间是否仿紧, 自然是不现实的, 我们有如下判断仿紧性的充分条件.

定理 6.14

X 是 Lindelöf 的正则空间, 则 X 是仿紧的.

6.4.3 不变性

- 仿紧性是闭遗传的. 此外, 我们还有如下命题

  命题

  若仿紧空间的每个开子空间是仿紧的, 则其每个子空间是仿紧的.

- 仿紧性不是有限可积性质.

  例 6.7 $\mathbb{R}_l$ 是实数下限拓扑空间, 由定理 6.14 知其是仿紧空间. 但 $\mathbb{R}_l^2$ 不是仿紧空间.